Die Beziehungen zwischen den Orthogonalprojektionen eines Polyeders.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt von

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Georg Simmen
aus **Annaberg** im Erzgeb.

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1915.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Rohn und Hölder.

Leipzig, den 27. April 1915.

Der Procancellar.
Zimmern.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Beziehungen, die zwischen verschiedenen ebenen Orthogonalprojektionen eines von Dreiecksflächen gebildeten Polyeders bestehen; auf Grund derselben wird dann entschieden, unter welchen Umständen sich gegebene n-Ecke als Orthogonalprojektionen eines und desselben Polyeders mit n Ecken ansehen lassen.

Die grundlegende Beziehung zwischen zwei ebenen Orthogonalprojektionen eines Polyeders besteht darin, daß man die eine stets so in die Ebene der andern legen kann, daß die Verbindungslinien homologer Eckpunkte einander parallell werden. Dabei ist es gleichgültig, ob das Polyeder im Raume beidemal die gleiche oder verschiedene Lagen einnimmt.

Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man zwei kongruente Polyeder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ und $\overline{\mathfrak{A}}\overline{\mathfrak{B}}\overline{\mathfrak{C}}\ldots$ mit den Projektionen $ABC\ldots$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots$ in zwei beliebigen Ebenen E und $\overline{E}$. Dann läßt sich das zweite Polyeder durch eine gewisse Verschraubung in das erste überführen. Denkt man sich nun dabei die Projektionsstrahlen $\overline{\mathfrak{A}}\overline{A}$, $\overline{\mathfrak{B}}\overline{B}$, $\overline{\mathfrak{C}}\overline{C}$ usw. sowie die Ebene $\overline{E}$ starr mit ihm verbunden, so lassen sich nach Vollendung der Schraubenbewegung durch die Punkte $\overline{A}\mathfrak{A}A$, $\overline{B}\mathfrak{B}B$, $\overline{C}\mathfrak{C}C$ usw. n parallele, zu E und $\overline{E}$ senkrechte Ebenen legen. Daher stehen die beiden in E und $\overline{E}$ liegenden Spuren einer solchen Ebene auf der Geraden $s = E \times \overline{E}$ in dem nämlichen Punkt senkrecht. Durch Umlegen der Ebene $\overline{E}$ um s in die Ebene E fallen die gesuchten Spuren aufeinander; dann ist aber in der Tat $\overline{A}A \| \overline{B}B \| \overline{C}C$ usw.

Die Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ befinden sich jetzt in affiner Lage und die Geraden $\bar{A}A$, $\bar{B}B$, $\bar{C}C$ sind hierbei Affinitätsstrahlen. Mit Rücksicht hierauf wollen wir weiterhin zwei Strahlen p und $\bar{p}$ kurz als Affinitätsstrahlen bezeichnen, wenn das mit p verbundene Dreieck ABC und das mit $\bar{p}$ verbundene Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in affine Lage gelangen, sobald man p mit $\bar{p}$ irgendwie zur Deckung bringt.

Zunächst haben wir nun festzustellen, unter welchen Umständen zwei Dreiecke in affine Lage gebracht werden können. Wir gehen aus von zwei Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, die sich bereits in affiner Lage befinden (Fig. 1) und bezeichnen den Affinitätsstrahl $C_1\bar{C}$ kurz mit p_1. Dann sind zu dem Dreieck $A_1B_1C_1$ außer dem Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ auch alle diejenigen Dreiecke affin und affin gelegen, deren Grundlinie $\bar{A}\bar{B}$ ist und deren Spitze in irgend einen Punkt von p_1 fällt. Bringen wir ferner $\triangle A_1B_1C_1$ durch eine beliebige Drehung um den gemeinsamen affinen Punkt S von A_1B_1 und $\bar{A}\bar{B}$ in eine neue Lage $A_0B_0C_0$, so bleibt $\bar{A}A_0 \parallel \bar{B}B_0$; ziehen wir also zu diesen Geraden eine Parallele p_0 durch C_0, so bilden auch alle Punkte von p_0 mit $\bar{A}\bar{B}$ zusammen Dreiecke, die zum Dreieck $A_1B_1C_1$ affin sind. Im ganzen gibt es, unendlich vielen Geraden p_0 entsprechend, doppelt unendlich viele solche Dreiecke. Ihre Spitzen erfüllen das Äußere und die Peripherie eines

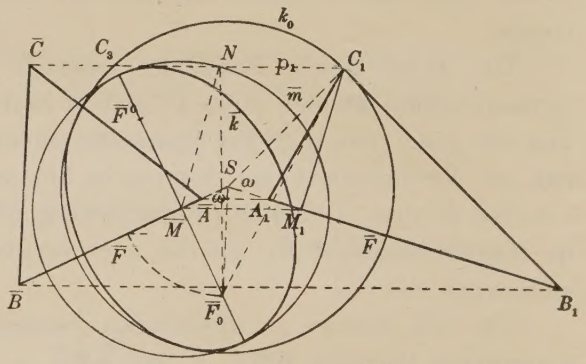

Fig. 1.

Kegelschnitts, denn die Geraden p_0 umhüllen einen Kegelschnitt.

Um dies zu zeigen, bringen wir den Kreis k_0, auf dem sich C_0 bei der Drehung des $\triangle A_1 B_1 C_1$ um den Punkt S bewegt, im Punkte F_1 mit $A_1 B_1$ zum Schnitt, bestimmen auf $\overline{A}\overline{B}$ den entsprechenden Punkt $\overline{F}$ und drehen $\overline{F}$ um den Winkel $\sphericalangle \overline{F} S \overline{F}_0 = \sphericalangle F S C_1 = \omega$ in die Lage $\overline{F}_0$; $\overline{F}_0$ verbinden wir mit C_1. Dann ist $\sphericalangle \overline{F}_0 C_1 \overline{C} = \omega$. Ferner fällen wir von $\overline{F}_0$ auf $S\overline{F}$ und $C_1 \overline{C}$ die Lote $\overline{F}_0 \overline{M}$ und $\overline{F}_0 N$. Verbinden wir dann $\overline{M}$ mit N, so ist $\triangle \overline{F}_0 \overline{M} N$ dem $\triangle \overline{F}_0 S C_1$ ähnlich, denn sie stimmen in den Winkeln bei $\overline{F}_0$ und im Verhältnis der anliegenden Seiten überein $\left[\sphericalangle \overline{M} \overline{F}_0 N = \sphericalangle S \overline{F}_0 C_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) - \sphericalangle S \overline{F}_0 N, \overline{F}_0 \overline{M} : \overline{F}_0 S = \overline{F}_0 N : \overline{F}_0 C_1 = \sin \omega\right]$. Mithin ist $\overline{M} N = S C_1 \sin \omega$, d. h. bewegt sich C_1 auf k_0, so bewegt sich N auf einem Kreis $\overline{m}$ um $\overline{M}$, und p_0 umhüllt den Kegelschnitt $\overline{k}$, dessen Mittelpunkt $\overline{M}$, dessen einer Brennpunkt $\overline{F}_0$ ist und dessen große Achse die Länge $S C_1 \sin \omega$ hat. Dabei ist $S C_1 \sin \omega$ nichts andres als die Höhe $h = C_1 M_1$ im Dreieck $A_1 B_1 C_1$, $\overline{M}$ ist der affine Punkt zu M_1 und die Exzentrizität $e = \overline{F}_0 \overline{M}$ von $\overline{k}$ ist gleich $h \cdot \frac{\overline{A}\overline{B}}{A_1 B_1}$. Je nachdem also $\frac{\overline{A}\overline{B}}{A_1 B_1} \lessgtr 1$ und folglich auch $\frac{S\overline{F}}{S F_1} \lessgtr 1$ ist, liegt $\overline{F}_0$ innerhalb, auf oder außerhalb k_0 und k_1 und entsprechend ist $\overline{k}$ eine Ellipse, ein Punkt (der zweite Schnittpunkt von k_0 und k_1) oder eine Hyperbel.

Im ersteren und letzteren Fall lautet seine Mittelpunktsgleichung, wenn $\frac{\overline{A}\overline{B}}{A_1 B_1} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\overline{k} \equiv x^2 (1 - \lambda^2) + y^2 - h^2 (1 - \lambda^2) = 0,$$

und die Koordinaten des außerhalb $\overline{k}$ gelegenen Punktes $\overline{C}$ genügen in diesem Fall der Ungleichung

$$x^2 (1 - \lambda^2) + y^2 - h^2 (1 - \lambda^2) \geqslant 0.$$

Der Kegelschnitt $\bar{k}$ geht mit dem Kreis k_0 eine doppelte Berührung ein. Denn es schließen ja die beiden Strahlen $C_1\overline{F}_0$ und $C_1\overline{C}=p_1$, von denen der erstere durch den einen Brennpunkt von $\bar{k}$ geht und der letztere $\bar{k}$ berührt, den Winkel $\omega = \sphericalangle C_1SA_1$ ein, und dieser Winkel bleibt völlig ungeändert, wenn man $\triangle A_1B_1C_1$ um S dreht. Bewegt sich aber ein konstanter Winkel so, daß der eine Schenkel einen Kegelschnitt beständig berührt, während der andere einen der beiden Brennpunkte enthält, so beschreibt sein Scheitel bekanntlich einen den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreis. Es ergibt sich dieses auch sofort analytisch. Da

$$\overline{MS} = \lambda \cdot M_1S = \lambda \cdot h \operatorname{cotg} \omega \quad \text{und} \quad SC_1 = \frac{h}{\sin \omega}$$

ist, so lautet die Gleichung des Kreises k_0 bezogen auf die Achsen von $\bar{k}$ als Koordinatenachsen

$$k_0 \equiv x^2 + (y - \lambda h \operatorname{cotg} \omega)^2 - \frac{h^2}{\sin^2 \omega} = 0,$$

und es ist

$$\bar{k} - (1-\lambda^2)\, k_0 \equiv \lambda^2 y^2 + 2\lambda y h (1-\lambda^2) \operatorname{cotg} \omega + h^2 (1-\lambda^2)^2 \operatorname{cotg}^2 \omega$$
$$\equiv [\lambda y + h (1-\lambda^2) \operatorname{cotg} \omega]^2.$$

Diese Gleichung besagt aber, daß k_0 und $\bar{k}$ sich doppelt berühren; und zwar liegt k_0 außerhalb $\bar{k}$, sodaß jede Tangente von $\bar{k}$ den Kreis k_0 in zwei reellen Punkten schneidet.

Spiegelt man $\triangle A_1B_1C_1$ an einer Geraden durch S, die senkrecht auf den Affinitätsstrahlen $\overline{A}A_1$, $\overline{B}B_1$ $\overline{C}C_1$ steht, so ergibt sich ein zu ihm symmetrisches Dreieck $A_3B_3C_3$, das sich ebenfalls mit $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ in affiner Lage befindet; hierbei sind die Affinitätsstrahlen die früheren. Von $\overline{C}$ läßt sich noch eine zweite Tangente an $\bar{k}$ legen; sie mag k_0 in C_2 und C_4 schneiden. Es gibt dann zwei Dreiecke $A_2B_2C_2$

und $A_4 B_4 C_4$, von denen das eine durch Drehung um S aus $\triangle A_1 B_1 C_1$, das andre ebenso aus $\triangle A_3 B_3 C_3$ hervorgeht. Sie befinden sich ebenfalls mit $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in affiner Lage; die Affinitätsstrahlen sind für beide die gleichen. Ob $\triangle A_2 B_2 C_2$ aus $\triangle A_1 B_1 C_1$ oder aus $\triangle A_3 B_3 C_3$ entsteht, wird dadurch entschieden, daß für jedes Dreieck $A_0 B_0 C_0$, das durch Drehung aus $\triangle A_1 B_1 C_1$ erhalten werden kann, $\sphericalangle \bar{C} C_0 \bar{F}_0 = \omega$ oder $= \pi - \omega$ ist. Ist daher $\triangle A_2 B_2 C_2$ aus $\triangle A_1 B_1 C_1$ durch Drehung entstanden, so muß auch $\sphericalangle \bar{C} C_2 \bar{F}_0 = \omega$ oder $= \pi - \omega$ sein. Für das symmetrische Dreieck $A_3 B_3 C_3$ und das daraus durch Drehung erhaltene Dreieck $A_4 B_4 C_4$ tritt dann der zweite Brennpunkt $\bar{F}^0$ von $\bar{k}$ an Stelle von $\bar{F}_0$, und es müssen $\sphericalangle \bar{F}^0 C_3 \bar{C}$ sowie $\sphericalangle \bar{F}^0 C_4 \bar{C}$ dem Winkel ω oder seinem Supplement gleich sein.

Der weiteren Betrachtung legen wir zwei Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zugrunde, deren Eckpunkte A und $\bar{A}$ der Einfachheit halber koinzidieren mögen. Wir denken uns wie vorher den Kegelschnitt $\bar{k}$ konstruiert; dann läßt sich, falls $\bar{C}$ außerhalb $\bar{k}$ gelegen ist, $\triangle ABC$ durch Drehung um A in affine Lage zum $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ bringen. Nennen wir die so erzielten affinen Dreiecke wie vorher AB_1C_1 und AB_2C_2, so sind $\bar{C}C_1 = p_{13}$ und $\bar{C}C_2 = p_{24}$ Tangenten von $\bar{k}$. Ferner existieren zwei zu $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ affine Dreiecke AB_3C_3 und AB_4C_4, die aus $\triangle ABC$ durch Spiegelung entstehen; nach dem oben Gesagten fällt $\bar{C}C_3$ mit $\bar{C}C_1 = p_{13}$ und $\bar{C}C_4$ mit $\bar{C}C_2 = p_{24}$ zusammen. Ist $\mathfrak{T}_i$ die Affinität zwischen $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ oder $\bar{\triangle}$ und $\triangle AB_iC_i$ oder $\triangle_i$, so gehört zu $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ der nämliche Affinitätsstrahl p_{13}, ebenso zu $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_4$ der nämliche Affinitätsstrahl p_{24}. Auch die Affinitätsachsen fallen paarweise zusammen; es besitzen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_4$ die gemeinsame Achse a_{14} und $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ die gemeinsame Achse a_{23}. Denn die Spiegelung von $\triangle_1$ an a_{14} liefert ein zu $\triangle_1$ symmetrisches Dreieck, das zugleich zu $\bar{\triangle}$ affin gelegen ist; das

kann aber nicht das Dreieck $\triangle_3$ sein, sonst müßte a_{14} auf p_{13} senkrecht stehen, was im allgemeinen nicht zutrifft.

Die gegenseitige Lage der Affinitätsstrahlen und Achsen wird durch Fig. 2 veranschaulicht. Um den Punkt A ist ein beliebiger Kreis l geschlagen; er schneidet a_{14} in $\overline{P} = P_1 = P_4$ und $\overline{Q} = Q_1 = Q_4$, sowie a_{23} in $\overline{R} = R_2 = R_3$ und $\overline{T} = T_2 = T_3$. Den Punkten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ entsprechen vermöge der Affinität $\mathfrak{T}_2$ resp. $\mathfrak{T}_3$ die Punkte P_2 und Q_2 resp. P_3 und Q_3; ferner entsprechen den Punkten $\overline{R}$ und $\overline{T}$ vermöge der Affinität $\mathfrak{T}_1$ resp. $\mathfrak{T}_4$ die Punkte R_1 und T_1 resp. R_4 und T_4. Alle diese Punkte liegen auf dem Kreis l, zugleich ist $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3 \perp a_{23}$, $R_1R_4 \parallel T_1T_4 \perp a_{14}$, und $\overline{P}P_3 \parallel \overline{Q}Q_3 \parallel \overline{R}R_1 \parallel \overline{T}T_1$ sowie $\overline{P}P_2 \parallel \overline{Q}Q_2 \parallel \overline{R}R_4 \parallel \overline{T}T_4$. Daher sind die Kreisbögen $P_3\overline{R}$, $\overline{R}P_2$, $R_1\overline{P}$, $\overline{P}R_4$ einander gleich. Nun entsprechen dem rechten Winkel $\overline{P}\overline{R}\overline{Q}$ vermöge der Affinitäten $\mathfrak{T}_1$ resp. $\mathfrak{T}_4$ die rechten Winkel $\overline{P}R_1\overline{Q}$ resp. $\overline{P}R_4\overline{Q}$ und vermöge der Affinitäten $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ die rechten Winkel $P_2\overline{R}Q_2$ und $P_3\overline{R}Q_3$. Sonach halbieren die Rechtwinkelstrahlen $\overline{R}\overline{P}$ und $\overline{R}\overline{Q}$, denen in allen vier Affinitäten $\mathfrak{T}_i$ wiederum Rechtwinkelstrahlen zugeordnet sind, sowohl die Winkel der Affinitätsstrahlen $\overline{R}R_1$ und $\overline{R}R_4$ als auch die Winkel der Gleichstrahlen (Strahlen mit gleichlangen affinen Strecken), die durch $\overline{R}$ zu a_{14} und a_{23} parallel laufen.

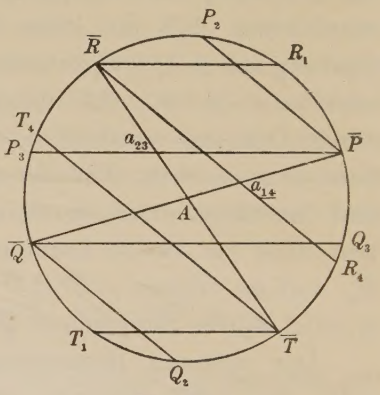

Fig. 2.

Ein Blick auf Fig. 1 zeigt nun, daß die ausgezeichneten Rechtwinkelstrahlen durch $\overline{C}$ die konjugiert rechtwinkligen Strahlen inbezug auf $\overline{k}$ sind. Wir haben also den Satz:

Zwei Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ bestimmen eine affine Beziehung. Hält man ABC und die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$ fest, variiert dagegen $\bar{C}$, so ergibt jede dieser Affinitäten zwei Rechtwinkelstrahlen durch $\bar{C}$, denen zwei Rechtwinkelstrahlen durch C entsprechen. Für jede Lage von $\bar{C}$ sind diese ausgezeichneten Rechtwinkelstrahlen konjugiert rechtwinklig zu einem und demselben Kegelschnitt $\bar{k}$; je nachdem $\bar{C}$ außerhalb oder innerhalb $\bar{k}$ liegt, lassen sich die beiden Dreiecke in affine Lage bringen oder nicht.

Die Gleichung des Kegelschnitts $\bar{k}$ bez. die Ungleichung für die außerhalb $\bar{k}$ gelegenen Punkte

$$x^2(1-\lambda^2)+y^2-h^2(1-\lambda^2)\geqslant 0$$

läßt sich noch in verschiedener Weise umgestalten. Bezeichnen wir die Seiten der Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mit a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ($a = BC$ usw.) und die Winkel bei A und $\bar{A}$ mit α und $\bar{\alpha}$, so ist

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{c}, \quad h^2 = b^2(1-\cos^2\alpha), \quad x^2 = \bar{b}^2(1-\cos^2\bar{\alpha}),$$

$$y = \bar{b}\cos\bar{\alpha} - \frac{\bar{c}}{c}\, b\cos\alpha$$

und durch Substitution dieser Werte in die obige Ungleichung nimmt sie die Gestalt an

$$(bc\cos\alpha - \bar{b}\bar{c}\cos\bar{\alpha})^2 - (b^2-\bar{b}^2)(c^2-\bar{c}^2)\geqslant 0.$$

Der Ausdruck linkerhand ist die Discriminante der Gleichung

$$\mu^2(b^2-\bar{b}^2)+2\mu(bc\cos\alpha-\bar{b}\bar{c}\cos\bar{\alpha})+(c^2-\bar{c}^2)=0,$$

die Ungleichung drückt also aus, daß es auf den Seiten BC und $\bar{B}\bar{C}$ zwei Paare reeller, verschiedener oder zusammenfallender affiner Punkte G, H und $\bar{G}, \bar{H}$ gibt, derart

daß $AG = \overline{A}\overline{G}$, $AH = \overline{A}\overline{H}$ ist, das Verhältnis affiner Strecken auf AG und $\overline{A}\overline{G}$, AH und $\overline{A}\overline{H}$ also den Wert 1 hat.

Setzt man weiter für $bc\cos\alpha$ und $\overline{b}\overline{c}\cos\overline{\alpha}$ die Ausdrücke $\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ und $\frac{1}{2}(\overline{b}^2+\overline{c}^2-\overline{a}^2)$ ein, so erhält man die Ungleichung in der symmetrischen, bereits von Möbius (Barycentrischer Calcul § 230 Anmerkung) angegebenen Form

$$(a^2-\overline{a}^2)^2+(b^2-\overline{b}^2)^2+(c^2-\overline{c}^2)^2-2(a^2-\overline{a}^2)(b^2-\overline{b}^2)$$
$$-2(b^2-\overline{b}^2)(c^2-\overline{c}^2)-2(c^2-\overline{c}^2)(a^2-\overline{a}^2)\geqslant 0.$$

Man kann sie wie folgt direkt erhalten: Angenommen, die beiden Dreiecke befinden sich bereits in affiner Lage und es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; $\overline{\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{c}}$ die Projektionen der gleichnamigen Seiten auf einen Affinitätsstrahl, so ist

$$\mathfrak{a}^2-\overline{\mathfrak{a}}^2=a^2-\overline{a}^2,\quad \mathfrak{b}^2-\overline{\mathfrak{b}}^2=b^2-\overline{b}^2,\quad \mathfrak{c}^2-\overline{\mathfrak{c}}^2=c^2-\overline{c}^2;$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}+\overline{\mathfrak{c}}=0,$$
$$\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2+2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{a}^2=\overline{\mathfrak{b}}^2+\overline{\mathfrak{c}}^2+2\,\overline{\mathfrak{b}}\overline{\mathfrak{c}}-\overline{\mathfrak{a}}^2$$
$$(2\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}-2\,\overline{\mathfrak{b}}\overline{\mathfrak{c}})^2-4(\mathfrak{b}^2-\overline{\mathfrak{b}}^2)(\mathfrak{c}^2-\overline{\mathfrak{c}}^2)=4(\mathfrak{b}\overline{\mathfrak{c}}-\overline{\mathfrak{b}}\mathfrak{c})^2\geqslant 0.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\{(b^2-\overline{b}^2)+(c^2-\overline{c}^2)-(a^2-\overline{a}^2)\}^2-4(b^2-\overline{b}^2)(c^2-\overline{c}^2)\geqslant 0$$

oder die voranstehende Ungleichung.

Bezieht man ferner die Dreiecke ABC und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ auf zwei beliebige rechtwinklige Koordinatensysteme xy und $\overline{x}\overline{y}$ (die insbesondere auch zusammenfallen können), in denen A, B, C und $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ der Reihe nach die Koordinaten x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3; $\overline{x}_1\overline{y}_1$, $\overline{x}_2\overline{y}_2$, $\overline{x}_3\overline{y}_3$ haben, so geht die Ungleichung

$$(bc\cos\alpha-\overline{b}\overline{c}\cos\overline{\alpha})^2-(b^2-\overline{b}^2)(c^2-\overline{c}^2)\geqslant 0$$

über in die Ungleichung

$$\begin{vmatrix} (x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1) & -(\bar{x}_2-\bar{x}_1)(\bar{x}_3-\bar{x}_1)-(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\bar{y}_3-\bar{y}_1) \\ (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 & -(\bar{x}_2-\bar{x}_1)^2-(\bar{y}_2-\bar{y}_1)^2 \\ (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 & -(\bar{x}_3-\bar{x}_1)^2-(\bar{y}_3-\bar{y}_1)^2 \\ (x_3-x_1)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(y_2-y_1) & -(\bar{x}_3-\bar{x}_1)(\bar{x}_2-\bar{x}_1)-(\bar{y}_3-\bar{y}_1)(\bar{y}_2-\bar{y}_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_3-x_1 & \bar{x}_3-\bar{x}_1 \\ x_2-x_1 & \bar{x}_2-\bar{x}_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3-x_1 & \bar{y}_3-\bar{y}_1 \\ x_2-x_1 & \bar{y}_2-\bar{y}_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_3-y_1 & \bar{x}_3-\bar{x}_1 \\ y_2-y_1 & \bar{x}_2-\bar{x}_1 \end{vmatrix}^2$$

$$+ \begin{vmatrix} y_3-y_1 & \bar{y}_3-\bar{y}_1 \\ y_2-y_1 & \bar{y}_2-\bar{y}_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} x_3-x_1 & y_3-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \bar{x}_3-\bar{x}_1 & \bar{y}_3-\bar{y}_1 \\ \bar{x}_2-\bar{x}_1 & \bar{y}_2-\bar{y}_1 \end{vmatrix}^2$$

$$= |x\bar{x}1|^2+|x\bar{y}1|^2+|y\bar{x}1|^2+|y\bar{y}1|^2-|xy1|^2-|\bar{x}\bar{y}1|^2 \geqslant 0,$$

wenn z. B. $|x\bar{x}1|$ die dreigliedrige Determinante mit den Zeilen $x_1\bar{x}_1 1$, $x_2\bar{x}_2 1$, $x_3\bar{x}_3 1$ bezeichnet. Die linke Seite dieser Ungleichung ändert sich nicht, wenn man zwei beliebige Indices oder die gestrichenen mit den ungestrichenen Koordinaten vertauscht. Es stellt daher

$$|x\bar{x}1|^2+|x\bar{y}1|^2+|y\bar{x}1|^2+|y\bar{y}1|^2-|xy1|^2-|\bar{x}\bar{y}1|^2=0,$$

je nachdem man darin $\bar{x}_3\bar{y}_3$ oder irgend ein anderes Koordinatenpaar als variabel betrachtet, die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts $\bar{k}$ oder irgend eines der fünf analogen Kegelschnitte dar, die man durch Vertauschung der Punkte $\bar{C}$, C mit den Punkten $\bar{B}$, B oder $\bar{A}$, A oder des Dreiecks $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$ mit dem Dreieck $A\,B\,C$ erhält.

Die oben in verschiedener Form aufgestellte Ungleichung muß natürlich für die homologen Dreiecke von

irgend zwei Orthogonalprojektionen eines jeden Polyeders gelten. Indessen ist die Gesamtheit der Bedingungen, die sich so ergeben, nicht hinreichend, um zwei ebene Figuren als Projektionen eines Polyeders zu charakterisieren. Denn alle diese Bedingungen besagen nur, daß je zwei homologe Dreiecke in affine Lage zueinander gebracht werden können; die Affinitätsrichtungen werden aber hierbei für die verschiedenen Dreieckspaare im allgemeinen verschieden ausfallen. Es müssen daher noch andere Bedingungen bestehen, welche die Übereinstimmung der Affinitätsrichtungen ausdrücken. Diese Bedingungen aufzusuchen, ist jetzt unsere Aufgabe.

Wir beginnen mit der Betrachtung zweier Vierecke, $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Hier genügt es festzustellen, unter welcher Bedingung sich durch die Punkte D und $\overline{D}$ zwei in Bezug auf die Dreiecke ABC und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ affine Gerade ziehen lassen, die von den dazu parallelen affinen Geraden durch A und $\overline{A}$ gleichweit abstehen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist und außerdem die Dreiecke ABC und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ der früheren Ungleichung genügen, so können die Vierecke $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ sicher in eine solche Lage zueinander gebracht werden, daß $A\overline{A} \parallel B\overline{B} \parallel C\overline{C} \parallel D\overline{D}$ wird.

Es gehen nun durch die Punkte D und $\overline{D}$ nur zwei Affinstrahlen in Bezug auf die Dreiecke ABC und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, nämlich die Verbindungslinie von D mit dem Punkte J, der zu $\overline{D}$ affin ist, und die Verbindungslinie von $\overline{D}$ mit dem Punkte $\overline{J}$, der zu D affin ist. Sie sind leicht zu konstruieren, analytisch bestimmen sie sich wie folgt.

Die Koordinaten der Punkte $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, bezogen auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem xy, seien x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4 bezw. $\bar{x}_1\bar{y}_1$, $\bar{x}_2\bar{y}_2$, $\bar{x}_3\bar{y}_3$, $\bar{x}_4\bar{y}_4$, die Koordinaten von J und $\overline{J}$ seien ξ, η und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$. Dann ist einerseits

$$x_4 = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \qquad y_4 = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3};$$

$$\bar{x}_4 = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + m_3 \bar{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad \bar{y}_4 = \frac{m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2 + m_3 \bar{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\bar{\xi} = \frac{l_1 \bar{x}_1 + l_2 \bar{x}_2 + l_3 \bar{x}_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \qquad \bar{\eta} = \frac{l_1 \bar{y}_1 + l_2 \bar{y}_2 + l_3 \bar{y}_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Als Gleichungen der Geraden DJ und $\bar{D}\bar{J}$ haben wir andrerseits:

$$(y - y_4)(\xi - x_4) - (x - x_4)(\eta - y_4) = 0$$

und

$$(y - \bar{y}_4)(\bar{\xi} - \bar{x}_4) - (x - \bar{x}_4)(\bar{\eta} - \bar{y}_4) = 0.$$

Aus den ersteren bestimmen sich die Verhältnisse der l_i und m_i, nämlich:

$$l_1 : l_2 : l_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & x_3 - x_4 \\ y_2 - y_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 - x_4 & x_1 - x_4 \\ y_3 - y_4 & y_1 - y_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_2 - x_4 \\ y_1 - y_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix}$$

$$m_1 : m_2 : m_3 = \begin{vmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{x}_3 - \bar{x}_4 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_4 & \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{x}_1 - \bar{x}_4 \\ \bar{y}_3 - \bar{y}_4 & \bar{y}_1 - \bar{y}_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}_1 - \bar{x}_4 & \bar{x}_2 - \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_4 & \bar{y}_2 - \bar{y}_4 \end{vmatrix}.$$

Dadurch erhält man

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_1 - \bar{x}_4 & \bar{y}_1 - \bar{y}_4 \\ x_2 & \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{y}_2 - \bar{y}_4 \\ x_3 & \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 & \bar{y}_2 - \bar{y}_3 \end{vmatrix}}, \quad \eta = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \bar{x}_1 - \bar{x}_4 & \bar{y}_1 - \bar{y}_4 \\ y_2 & \bar{x}_2 - \bar{x}_4 & \bar{y}_2 - \bar{y}_4 \\ y_3 & \bar{x}_3 - \bar{x}_4 & \bar{y}_3 - \bar{y}_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 & \bar{y}_2 - \bar{y}_3 \end{vmatrix}};$$

$$\bar{\xi} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \\ \bar{x}_2 & x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \\ \bar{x}_3 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}, \quad \bar{\eta} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \\ \bar{y}_2 & x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \\ \bar{y}_3 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}.$$

Mithin ist

$$\xi - x_4 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ x_3 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \\ x_4 & \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \eta - y_4 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ y_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ y_3 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \\ y_4 & \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \end{vmatrix}};$$

$$\bar{\xi} - \bar{x}_4 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ \bar{x}_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \bar{\eta} - \bar{y}_4 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \bar{y}_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \bar{y}_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ \bar{y}_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Schreiben wir also für die Determinanten in den Zählern der vier letzten Ausdrücke zur Abkürzung

$$|x\bar{x}\bar{y}1|, \quad |y\bar{x}\bar{y}1|, \quad |\bar{x}xy1|, \quad |\bar{y}xy1|,$$

so lauten die Gleichungen von DJ und $\overline{D}\overline{J}$

$$(y-y_4)\,|\,x\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|-(x-x_4)\,|\,y\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|=0$$

und

$$(y-\bar{y}_4)\,|\,\bar{x}\,x\,y\,1\,|-(x-\bar{x}_4)\,|\,\bar{y}\,x\,y\,1\,|=0.$$

Ihre Abstände von den Punkten A und $\overline{A}$ sind

$$\frac{(y_1-y_4)\,|\,x\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|-(x_1-x_4)\,|\,y\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|}{\sqrt{|\,x\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|^2+|\,y\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|^2}}$$

und

$$\frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_4)\,|\,\bar{x}\,x\,y\,1\,|-(\bar{x}_1-\bar{x}_4)\,|\,\bar{y}\,x\,y\,1\,|}{\sqrt{|\,\bar{x}\,x\,y\,1\,|^2+|\,\bar{y}\,x\,y\,1\,|^2}}.$$

Diese Ausdrücke also haben wir einander gleichzusetzen. Ihre Zähler sind nun, wie die Determinante

$$\delta(i)\equiv\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_i-x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_i-y_4 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 & \bar{x}_i-\bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 & \bar{y}_i-\bar{y}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ (i=1,\,2,\,3)$$

unmittelbar zeigt, entgegengesetzt gleich. Daher lautet die gesuchte Bedingung

$$|\,x\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|^2+|\,y\,\bar{x}\,\bar{y}\,1\,|^2-|\,\bar{x}\,x\,y\,1\,|^2-|\,\bar{y}\,x\,y\,1\,|^2=0.$$

Da außer $\delta(1)$ auch $\delta(2)$ und $\delta(3)=0$ ist, drückt dieselbe aber auch die Gleichheit der Abstände der Punkte B und $\overline{B}$ sowie C und $\overline{C}$ von den Graden DJ und $\overline{D}\overline{J}$ aus. Daraus folgt, daß die obige Bedingung *allein* hinreicht, um die Vierecke $ABCD$ und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ als solche zu charakterisieren, deren homologe Eckpunkte bei passend gewählter relativer Lage auf vier Parallelen liegen. Sie sagt also zugleich aus, daß die

Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (und ebenso die übrigen homologen Dreiecke) in affine Lage gebracht werden können.

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so stehen auf Grund der Gleichungen $\delta(i) = 0$ die Abstände der Punkte A und $\bar{A}$, B und $\bar{B}$, C und $\bar{C}$ von den Geraden DJ und $\bar{D}\bar{J}$ immerhin in einem konstanten Verhältnis zueinander. Zwei beliebige Vierecke lassen sich daher stets durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung des einen in solche verwandeln, deren homologe Eckpunkte bei passend gewählter relativer Lage auf Parallelen gelegen sind.

Die Gleichung

$$|x\bar{x}\bar{y}1|^2+|y\bar{x}\bar{y}1|^2-|\bar{x}xy1|^2-|\bar{y}xy1|^2=0$$

ist in den Koordinaten jedes einzelnen Punktes vom zweiten Grad. Sie stellt also ebenfalls einen Kegelschnitt dar, wenn man darin die Koordinaten eines Punktes als variabel betrachtet. Der Grund hierfür ist leicht zu erkennen. Der veränderliche Punkt sei $\bar{D}$, die Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ seien in affiner Lage. Dann kann $\bar{D}$ erstens in sämtliche Punkte des Affinstrahles durch D fallen. Durch eine Drehung läßt sich $\triangle ABC$ abermals in affine Lage zum $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ bringen. Dabei kommt der Punkt D in eine neue Lage D'. Der Affinstrahl durch D' ist ebenfalls ein Ort für den Punkt $\bar{D}$. Eine andre Lage kann $\bar{D}$ nicht einnehmen. Die obige Gleichung stellt also ein Geradenpaar dar.

Sie muß sich daher auch in zwei Linearfaktoren zerspalten lassen. In der Tat: Zunächst kann man sie ersetzen durch die beiden Gleichungen

$$|x\bar{x}\bar{y}1|+|\bar{x}xy1|+\varrho|y\bar{x}\bar{y}1|+\varrho|\bar{y}xy1|=0$$

und

$$\varrho|x\bar{x}\bar{y}1|-\varrho|\bar{x}xy1|-|y\bar{x}\bar{y}1|+|\bar{y}xy1|=0$$

Nun bestehen aber noch die Relationen

$$y_i|x\bar{x}\bar{y}1|+\bar{y}_i|\bar{x}xy1|-x_i|y\bar{x}\bar{y}1|-\bar{x}_i|\bar{y}xy1|-|xy\bar{x}\bar{y}|=0,$$
$$i=1,2,3;$$

denn die linken Seiten sind nichts andres als fünfgliedrige Determinanten mit zwei gleichen Reihen. Folglich muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varrho & \varrho & 0 \\ \varrho & -\varrho & -1 & 1 & 0 \\ y_1 & \bar{y}_1 & -x_1 & -\bar{x}_1 & 1 \\ y_2 & \bar{y}_2 & -x_2 & -\bar{x}_2 & 1 \\ y_3 & \bar{y}_3 & -x_3 & -\bar{x}_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

sein, d. h., wenn wieder

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=|xy1|$$

usw. gesetzt wird,

$$\varrho^2\{|\bar{x}\bar{y}1|-|x\bar{y}1|+|\bar{x}y1|-|xy1|\}-2\varrho\{|x\bar{x}1|-|y\bar{y}1|\}$$
$$+\{|\bar{x}\bar{y}1|+|x\bar{y}1|-|\bar{x}y1|-|xy1|\}=0,$$

also

$$\varrho=\frac{|x\bar{x}1|-|y\bar{y}1|\pm\sqrt{\Delta}}{|\bar{x}\bar{y}1|-|x\bar{y}1|+|\bar{x}y1|-|xy1|}.$$

Dabei ist

$$\Delta=\{|x\bar{x}1|-|y\bar{y}1|\}^2+\{|x\bar{y}1-|\bar{x}y1|\}^2-\{|\bar{x}\bar{y}1|-|xy1|\}^2$$
$$=|x\bar{x}1|^2+|x\bar{y}1|^2+|y\bar{x}1|^2+|y\bar{y}1|^2-|xy1|^2-|\bar{x}\bar{y}1|^2,$$

denn der Ausdruck

$$|x\bar{x}1|\ |y\bar{y}1|+|x\bar{y}1|\ |\bar{x}y1|-|\bar{x}\bar{y}1|\ |xy1|$$

verschwindet identisch. Setzt man den Wert von ϱ in die erste oder zweite der obigen Gleichungen ein, so erhält man die Spaltung der Gleichung

$$|x\bar{x}\bar{y}1|^2+|y\bar{x}\bar{y}1|^2-|\bar{x}xy1|^2-|\bar{y}xy1|^2=0$$

in zwei in den Koordinaten $x_4 y_4$ und $\bar{x}_4\bar{y}_4$ von D und $\bar{D}$ lineare Ausdrücke

$$\{|\bar{x}\bar{y}1|-|x\bar{y}1|+|\bar{x}y1|-|xy1|\}\{|x\bar{x}\bar{y}1|+|\bar{x}xy1|\}$$
$$+\{|x\bar{x}1|-|y\bar{y}1|\pm\sqrt{\Delta}\}\{|y\bar{x}\bar{y}1|+|\bar{y}xy1|\}=0.$$

Die Gleichung

$$|x\bar{x}\bar{y}1|^2+|y\bar{x}\bar{y}1|^2-|\bar{x}xy1|^2-|\bar{y}xy1|^2=0$$

ist nun wiederum nur der Ausdruck einer gewissen Identität, die unter der Voraussetzung, daß die Vierecke $ABCD$ und $A\bar{B}\bar{C}D$ so liegen, daß $A\bar{A}\|B\bar{B}\|C\bar{C}\|D\bar{D}$ ist, zwischen den Projektionen ihrer Seiten auf eine beliebige zu diesen Affinstrahlen parallele Gerade besteht. Bezeichnen wir die Seiten DA, DB, DC, BC, CA, AB der Reihe nach mit a, b, c; a_1, b_1, c_1, ihre Projektionen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und die entsprechenden Seiten sowie ihre Projektionen im andern Viereck mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{c}_1$ und $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{c}}$; $\bar{\mathfrak{a}}_1$, $\bar{\mathfrak{b}}_1$, $\bar{\mathfrak{c}}_1$, so verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2-\bar{\mathfrak{a}}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} & \mathfrak{a}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{c}} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}} & \mathfrak{b}^2-\bar{\mathfrak{b}}^2 & \mathfrak{b}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{c}} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{a}} & \mathfrak{c}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{b}} & \mathfrak{c}^2-\bar{\mathfrak{c}}^2 \end{vmatrix}$$

identisch, da jede ihrer acht Teildeterminanten proportionale Spalten enthält. Nun ist

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c}_1=\bar{\mathfrak{a}}-\bar{\mathfrak{b}}+\bar{\mathfrak{c}}_1,\quad \mathfrak{b}-\mathfrak{c}+\mathfrak{a}_1=\bar{\mathfrak{b}}-\bar{\mathfrak{c}}+\bar{\mathfrak{a}}_1,$$
$$\mathfrak{c}-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_1=\bar{\mathfrak{c}}-\bar{\mathfrak{a}}+\bar{\mathfrak{b}}_1$$

und daher

$$2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}})=(\mathfrak{a}^2-\bar{\mathfrak{a}}^2)+(\mathfrak{b}^2-\bar{\mathfrak{b}}^2)-(\mathfrak{c}_1^2-\bar{\mathfrak{c}}_1^2)$$
$$2(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{c}})=(\mathfrak{b}^2-\bar{\mathfrak{b}}^2)+(\mathfrak{c}^2-\bar{\mathfrak{c}}^2)-(\mathfrak{a}_1^2-\bar{\mathfrak{a}}_1^2)$$
$$2(\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{a}})=(\mathfrak{c}^2-\bar{\mathfrak{c}}^2)+(\mathfrak{a}^2-\bar{\mathfrak{a}}^2)-(\mathfrak{b}_1^2-\bar{\mathfrak{b}}_1^2);$$

ferner ist

$$\mathfrak{a}^2-\bar{\mathfrak{a}}^2=a^2-\bar{a}^2,\quad \mathfrak{b}^2-\bar{\mathfrak{b}}^2=b^2-\bar{b}^2,\quad \mathfrak{c}^2-\bar{\mathfrak{c}}^2=c^2-\bar{c}^2$$
$$\mathfrak{a}_1^2-\bar{\mathfrak{a}}_1^2=a_1^2-\bar{a}_1^2,\quad \mathfrak{b}_1^2-\bar{\mathfrak{b}}_1^2=b_1^2-\bar{b}_1^2,\quad \mathfrak{c}_1^2-\bar{\mathfrak{c}}_1^2=c_1^2-\bar{c}_1^2.$$

Somit erhält man

$$\begin{vmatrix} 2(a^2-\bar{a}^2) & (a^2-\bar{a}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(c_1^2-\bar{c}_1^2) \\ (a^2-\bar{a}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(c_1^2-\bar{c}_1^2) & 2(b^2-\bar{b}^2) \\ (a^2-\bar{a}^2)-(b_1^2-\bar{b}_1^2)+(c^2-\bar{c}^2), & -(a_1^2-\bar{a}_1^2)+(b^2-\bar{b}^2)+(c^2-\bar{c}^2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (a^2-\bar{a}^2)-(b_1^2-\bar{b}_1^2)+(c^2-\bar{c}^2) \\ -(a_1^2-\bar{a}_1^2)+(b^2-\bar{b}^2)+(c^2-\bar{c}^2) \\ 2(c^2-\bar{c}^2) \end{vmatrix}=0.$$

Bezieht man nun das Viereck $ABCD$ auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung D, in dem A, B, C die Koordinaten x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 haben, und das Viereck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung $\bar{D}$, in dem $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ die Koordinaten $\bar{x}_1\bar{y}_1$, $\bar{x}_2\bar{y}_2$, $\bar{x}_3\bar{y}_3$ haben, so kann man an Stelle der voranstehenden Determinante schreiben

$$V\equiv\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2-\bar{x}_1^2-\bar{y}_1^2 & x_2x_1+y_2y_1-\bar{x}_2\bar{x}_1-\bar{y}_2\bar{y}_1 \\ x_1x_2+y_1y_2-\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{y}_1\bar{y}_2 & x_2^2+y_2^2-\bar{x}_2^2-\bar{y}_2^2 \\ x_1x_3+y_1y_3-\bar{x}_1\bar{x}_3-\bar{y}_1\bar{y}_3 & x_2x_3+y_2y_3-\bar{x}_2\bar{x}_3-\bar{y}_2\bar{y}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3x_1+y_3y_1-\bar{x}_3\bar{x}_1-\bar{y}_3\bar{y}_1 \\ x_3x_2+y_3y_2-\bar{x}_3\bar{x}_2-\bar{y}_3\bar{y}_2 \\ x_3^2+y_3^2-\bar{x}_3^2-\bar{y}_3^2 \end{vmatrix}=0.$$

Diese Determinante zerfällt in 64 Teildeterminanten; davon verschwinden 40, weil sie proportionale Spalten enthalten; es verbleiben sodann noch 24, deren Spalten aus nicht-homologen Summanden der entsprechenden Spalten von V gebildet sind. Je sechs davon enthalten in homologen Spalten homologe Summanden von V und haben eine der Determinanten

$$|x\bar{x}\bar{y}|, \quad |y\bar{x}\bar{y}|, \quad -|\bar{x}xy|, \quad -|\bar{y}xy|$$

als gemeinsamen Faktor; die Summe der anderen Faktoren ergibt allemal dieselbe Determinante. So erhält man

$$V \equiv |x\bar{x}\bar{y}|^2 + |y\bar{x}\bar{y}|^2 - |\bar{x}xy|^2 - |\bar{y}xy|^2 = 0.$$

Bezieht man die beiden Vierecke auf ein beliebiges gemeinsames rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem die Punkte A, B, C, D und $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ die Koordinaten

$$x_1y_1, \; x_2y_2, \; x_3y_3, \; x_4y_4 \quad \text{bez.} \quad \bar{x}_1\bar{y}_1, \; \bar{x}_2\bar{y}_2, \; \bar{x}_3\bar{y}_3, \; \bar{x}_4\bar{y}_4$$

haben, so spielen die Differenzen

$$x_i - x_4, \; y_i - y_4 \quad \text{und} \quad \bar{x}_i - \bar{x}_4, \; \bar{y}_i - \bar{y}_4, \quad i = 1, 2, 3,$$

die Rolle, die soeben x_i, y_i und $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ spielten, d. h. es ergibt sich dann

$$|x\bar{x}\bar{y}1|^2 + |y\bar{x}\bar{y}1|^2 - |\bar{x}xy1|^2 - |\bar{y}xy1|^2 = 0,$$

wie behauptet war.

Dasselbe Schema läßt sich nun auch noch auf zwei Fünfecke $ABCDE$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ anwenden, deren homologe Eckpunkte bei passender Wahl der relativen Lage auf fünf Parallele zu liegen kommen. Bezeichnet man die

Seiten EA, EB, EC, ED mit a, b, c, d, ihre Projektionen auf eine der genannten Parallelen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und die entsprechenden Seiten und Projektionen für die andere Figur mit den entsprechenden gestrichenen Buchstaben, so ist wiederum

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2-\bar{\mathfrak{a}}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} & \mathfrak{a}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{c}} & \mathfrak{a}\mathfrak{d}-\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}} & \mathfrak{b}^2-\bar{\mathfrak{b}}^2 & \mathfrak{b}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{c}} & \mathfrak{b}\mathfrak{d}-\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{a}} & \mathfrak{c}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{b}} & \mathfrak{c}^2-\bar{\mathfrak{c}}^2 & \mathfrak{c}\mathfrak{d}-\bar{\mathfrak{c}}\bar{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{d}\mathfrak{a}-\bar{\mathfrak{d}}\bar{\mathfrak{a}} & \mathfrak{d}\mathfrak{b}-\bar{\mathfrak{d}}\bar{\mathfrak{b}} & \mathfrak{d}\mathfrak{c}-\bar{\mathfrak{d}}\bar{\mathfrak{c}} & \mathfrak{d}^2-\bar{\mathfrak{d}}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus folgt zunächst

$$\begin{vmatrix} 2(a^2-\bar{a}^2) & (a^2-\bar{a}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(BA^2-\bar{B}\bar{A}^2) \\ (a^2-\bar{a}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(AB^2-\bar{A}\bar{B}^2) & 2(b^2-\bar{b}^2) \\ (a^2-\bar{a}^2)+(c^2-\bar{c}^2)-(AC^2-\bar{A}\bar{C}^2) & (c^2-\bar{c}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(BC^2-\bar{B}\bar{C}^2) \\ (a^2-\bar{a}^2)+(d^2-\bar{d}^2)-(AD^2-\bar{A}\bar{D}^2) & (d^2-\bar{d}^2)+(b^2-\bar{b}^2)-(BD^2-\bar{B}\bar{D}^2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (a^2-\bar{a}^2)+(c^2-\bar{c}^2)-(CA^2-\bar{C}\bar{A}^2) & (a^2-\bar{a}^2)+(d^2-\bar{d}^2)-(DA^2-\bar{D}\bar{A}^2) \\ (b^2-\bar{b}^2)+(c^2-\bar{c}^2)-(CB^2-\bar{C}\bar{B}^2) & (b^2-\bar{b}^2)+(d^2-\bar{d}^2)-(DB^2-\bar{D}\bar{B}^2) \\ 2(c^2-\bar{c}^2) & (c^2-\bar{c}^2)+(d^2-\bar{d}^2)-(DC^2-\bar{D}\bar{C}^2) \\ (d^2-\bar{d}^2)+(c^2-\bar{c}^2)-(CD^2-\bar{C}\bar{D}^2) & 2(d^2-\bar{d}^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man hierin die Koordinaten x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4 der Punkte $ABCD$, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung E, und die Koordinaten $\bar{x}_1\bar{y}_1$, $\bar{x}_2\bar{y}_2$, $\bar{x}_3\bar{y}_3$, $\bar{x}_4\bar{y}_4$ der Punkte $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung $\bar{E}$ ein, so kommt

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 - \bar{x}_1^2 - \bar{y}_1^2 & x_2x_1 + y_2y_1 - \bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_2\bar{y}_1 \\ x_1x_2 + y_1y_2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{y}_1\bar{y}_2 & x_2^2 + y_2^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{y}_2^2 \\ x_1x_3 + y_1y_3 - \bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{y}_1\bar{y}_3 & x_2x_3 + y_2y_3 - \bar{x}_2\bar{x}_3 - \bar{y}_2\bar{y}_3 \\ x_1x_4 + y_1y_4 - \bar{x}_1\bar{x}_4 - \bar{y}_1\bar{y}_4 & x_2x_4 + y_2y_4 - \bar{x}_2\bar{x}_4 - \bar{y}_2\bar{y}_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3x_1 + y_3y_1 - \bar{x}_3\bar{x}_1 - \bar{y}_3\bar{y}_1 & x_4x_1 + y_4y_1 - \bar{x}_4\bar{x}_1 - \bar{y}_4\bar{y}_1 \\ x_3x_2 + y_3y_2 - \bar{x}_3\bar{x}_2 - \bar{y}_3\bar{y}_2 & x_4x_2 + y_4y_2 - \bar{x}_4\bar{x}_2 - \bar{y}_4\bar{y}_2 \\ x_3^2 + y_3^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2 & x_4x_3 + y_4y_3 - \bar{x}_4\bar{x}_3 - \bar{y}_4\bar{y}_3 \\ x_3x_4 + y_3y_4 - \bar{x}_3\bar{x}_4 - \bar{y}_3\bar{y}_4 & x_4^2 + y_4^2 - \bar{x}_4^2 - \bar{y}_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante läßt sich zerlegen in 24 nichtverschwindende Teildeterminanten, die alle die Determinante $|xy\bar{x}\bar{y}|$ als Faktor enthalten. Die Summe der andern Faktoren ist ebenfalls $|xy\bar{x}\bar{y}|$, sodaß die Determinante Q den Wert $|xy\bar{x}\bar{y}|^2$ hat. Legt man statt der gewählten besonderen zwei (verschiedene oder zusammenfallende) beliebige rechtwinklige Koordinatensysteme zugrunde, in denen E und $\bar{E}$ statt der Koordinaten 0,0 die Koordinaten x_5y_5 bez. $\bar{x}_5\bar{y}_5$ haben, so erhält man an Stelle der Determinante $|xy\bar{x}y|^2$ die Determinante $|xy\bar{x}\bar{y}1|^2$. Zwischen den Koordinaten x_iy_i und $\bar{x}_i\bar{y}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ zweier Fünfecke, deren homologe Ecken bei passend gewählter relativer Lage durch Parallele verbunden werden können, besteht also die in den Koordinaten der einzelnen Punkte lineare Relation

$$|xy\bar{x}\bar{y}1| = 0.$$

Diese Bedingung ist indessen keine hinreichende, es läßt sich aus ihr allein nicht folgern, daß beispielsweise die Abstände der Punkte E und $\bar{E}$ von den in Bezug

auf die Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ affinen Geraden DJ und $\bar{D}\bar{J}$,

$$(y-y_4)\,|x\bar{x}\bar{y}1|-(x-x_4)\,|y\bar{x}\bar{y}1|=0$$

und

$$(y-\bar{y}_4)\,|\bar{x}xy1|-(x-\bar{x}_4)\,|\bar{y}xy1|=0,$$

gleich sind. Dazu muß vielmehr noch die Gleichung

$$|x\bar{x}\bar{y}1|^2+|y\bar{x}\bar{y}1|^2-|\bar{x}xy1|^2-|\bar{y}xy1|^2=0$$

für die Punkte $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ erfüllt sein. Dann und nur dann liefert die aus der Gleichung $|xy\bar{x}\bar{y}1|=0$ folgende Gleichung

$$x_5\,|y\bar{x}\bar{y}1|-y_5\,|x\bar{x}\bar{y}1|+\bar{x}_5\,|\bar{y}xy1|-\bar{y}_5\,|\bar{x}xy1|+|xy\bar{x}\bar{y}|=0$$

in Verbindung mit der Identität

$$x_4\,|y\bar{x}\bar{y}1|-y_4\,|x\bar{x}\bar{y}1|+\bar{x}_4\,|\bar{y}xy1|-\bar{y}_4\,|\bar{x}xy1|+|xy\bar{x}\bar{y}|\equiv 0$$

die Gleichung

$$\frac{(y_5-y_4)\,|x\bar{x}\bar{y}1|-|(x_5-x_4)\,|y\bar{x}\bar{y}1|}{\sqrt{|x\bar{x}\bar{y}1|^2+|y\bar{x}\bar{y}1|^2}}=\frac{-(\bar{y}_5-\bar{y}_4)\,|\bar{x}xy1|-(\bar{x}_5-\bar{x}_4)\,|\bar{y}xy1|}{\sqrt{|\bar{x}xy1|^2+|\bar{y}xy1|^2}},$$

welche die Gleichheit der genannten Abstände ausdrückt.

Ist die Bedingung $|xy\bar{x}\bar{y}1|=0$ erfüllt, nicht aber die andere, so können die Fünfecke wiederum durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung des einen in solche verwandelt werden, deren homologe Eckpunkte bei passend gewählter relativer Lage auf Parallelen liegen, denn es stehen dann die Abstände der homologen Eckpunkte von den Geraden DJ und $\bar{D}\bar{J}$ wiederum in einem konstanten Verhältnis.

Auf zwei n-Ecke mit mehr als fünf Ecken angewandt führt das oben angedeutete Schema zu keinem neuen Er-

gebnis, denn die Determinante in den Koordinaten der einzelnen Punkte, die der Determinante Q entspricht, verschwindet für $n>5$ identisch. Damit bei passend gewählter relativer Lage die homologen Ecken zweier Polygone mit mehr als fünf Ecken auf Parallelen liegen, ist vielmehr notwendig und hinreichend das gleichzeitige Bestehen der Gleichung

$$K \equiv |x\bar{x}\bar{y}1|^2 + |y\bar{x}\bar{y}1|^2 - |\bar{x}xy1|^2 - |\bar{y}xy1|^2 = 0$$

in den Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ und $\bar{x}_1 \bar{y}_1$, $\bar{x}_2 \bar{y}_2$, $\bar{x}_3 \bar{y}_3$, $\bar{x}_4 \bar{y}_4$ und der $(n-4)$-Gleichungen

$$L(i) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & 1 \\ x_i & y_i & \bar{x}_i & \bar{y}_i & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad i = 5, \ \ldots n.$$

Allerdings ist dabei vorauszusetzen, daß die Vierecke $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, mit deren Koordinaten die Gleichungen gebildet sind, nicht affin sind. Dann fallen nämlich die früher (S. 12) mit $J(\xi, \eta)$ und $\bar{J}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ bezeichneten Punkte mit den Punkten D und $\bar{D}$ zusammen, es wird $\xi - x_4$, $\eta - y_4$, $\bar{\xi} - \bar{x}_4$, $\bar{\eta} - \bar{y}_4 = 0$ und daher zerfällt die Gleichung $K = 0$ in die vier Gleichungen

$$|x\bar{x}\bar{y}1| = 0, \quad |y\bar{x}\bar{y}1| = 0, \quad |\bar{x}xy1| = 0, \quad |\bar{y}xy1| = 0,$$

während die Gleichung $L(i) = 0$ ihren Sinn verliert, da die vorstehenden Determinanten gerade die Koeffizienten der $y_i, x_i, \bar{y}_i, \bar{x}_i$ sind. Man hat also die mit $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{B}\bar{D}$ bezeichneten Vierecke in den in Frage stehenden Figuren so auszuwählen, daß die genannte Voraussetzung zutrifft.

Falls die Figuren nicht überhaupt affin sind, ist dies stets möglich. Für den Fall der Affinität aber müssen $(n-3)\cdot 4$ Gleichungen der Art bestehen, wie sie für zwei affine Vierecke oben angegeben worden sind.

Mittels der gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun sofort entscheiden, ob und wie zwei vorgegebene Polygone in eine solche relative Lage gebracht werden können, daß sie als Orthogonalprojektionen eines und desselben Polyeders erscheinen. Zunächst müssen die aufgestellten Bedingungen erfüllt sein; dann ist es möglich, beide Polygone in einer Ebene so anzuordnen, daß ihre homologen Ecken auf Parallelen liegen. Nun ziehe man eine beliebige Gerade s senkrecht zu den genannten Parallelen und drehe das eine Polygon um einen beliebigen Winkel um s aus der ursprünglichen Figurenebene E in eine andere Lage $\bar{E}$ heraus. Jetzt errichte man in den Punkten des gedrehten und des unverändert gebliebenen Polygons die Senkrechten auf $\bar{E}$ bez. E. Die Schnittpunkte der in homologen Punkten errichteten Senkrechten bilden die Ecken des gesuchten Polyeders. Zu den vorgelegten Polygonen gibt es sonach unendlich viele wesentlich verschiedene Polyeder. In der Regel werden sie aus lauter Dreiecksflächen bestehen; kommen jedoch in den gegebenen Figuren auch affine Vierecke, Fünfecke usw. vor, d. h. sind die entsprechenden Affinitätsbedingungen erfüllt, so enthält es auch Vierecks-, Fünfecksflächen usw. In einer zu s senkrechten Ebene läßt sich von jedem dieser Polyeder sofort ein Aufriß zeichnen. Ändert man s, so werden die erhaltenen Polyeder nur vertikal verschoben.

Als Beispiel wollen wir zwei Vierecke $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, die als Tetraederprojektionen aufgefaßt werden können, konstruktiv bestimmen und einen der zugehörigen Aufrisse

angeben (Fig. 3). Das Viereck $ABCD$ sei vollständig gegeben, vom Viereck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ vorderhand nur $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Dann können wir nach den Ausführungenauf S. 5 wie folgt verfahren, um zunächst $\triangle ABC$ zum $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in affine Lage zu bringen. Wir ziehen im Dreieck ABC die Höhe CM und suchen auf $\bar{A}\bar{B}$ den zu M affinen Punkt $\bar{M}$ auf. Dann ver-

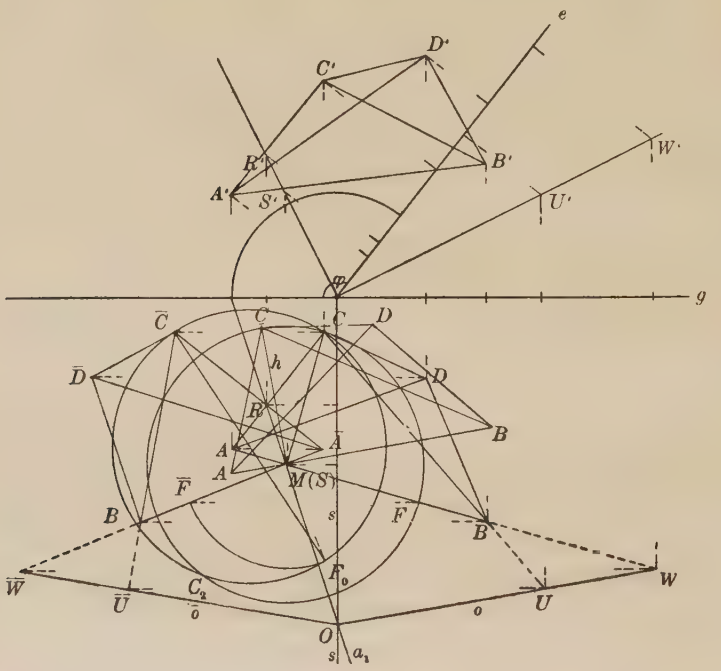

Fig. 3.

schieben wir das Viereck $ABCD$, bis M mit $\bar{M}$ zusammenfällt und schlagen um $\bar{M} = M$ mit $CM = h$ einen Kreis k_0, der AB im Punkte F schneide. Zu F suchen wir auf $\bar{A}\bar{B}$ den entsprechenden Punkt $\bar{F}$ auf und drehen ihn im Sinne des Bogens FC auf k_0 um 90^0 in die Lage $\bar{F}_0$. Über $\bar{C}\bar{F}_0$ als Durchmesser konstruieren wir den Kreis k_2, der k_0

in C_1 und C_2 schneide. Bringen wir hierauf das Viereck $ABCD$ durch Drehung um $M = \overline{M}$ in eine solche Lage, daß C nach C_1 oder C_2 fällt und ziehen dann durch D eine Gerade parallel zu $\overline{C}C_1$ bez. $\overline{C}C_2$, so kann jeder Punkt dieser Geraden zum Punkt $\overline{D}$ gemacht werden. Wir wählen einen bestimmten Punkt $\overline{D}$ auf der Parallelen zu $\overline{C}C_1$ aus und ziehen die Gerade s senkrecht zu $\overline{C}C_1$, die Gerade g parallel zu $\overline{C}C_1$, letztere wählen wir als Projektionsachse. Durch den Schnittpunkt H von s und g ziehen wir unter dem Winkel φ gegen die Gerade g eine Gerade e und tragen von H aus auf e die Abstände der Punkte $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ von der Geraden s ab. In den so erhaltenen Punkten errichten wir auf e die Senkrechten und bringen sie mit den Senkrechten zu g durch die zugehörigen Punkte A, B, C, D zum Schnitt. Die Schnittpunkte seien $A'B'C'D'$. Dann stellt $A'B'C'D'$ den Aufriß eines Tetraeders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ mit den orthogonalen Projektionen $ABCD$ und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ dar.

Zwischen der Gesamtheit der Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, die man auf diese Weise erhält, indem man φ alle möglichen Werte erteilt, besteht eine bemerkenswerte Beziehung: Die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (ebenso natürlich die andern) umhüllen einen Kegel.

Um dies zu zeigen, ziehen wir noch die Affinitätsachse a_1 der Dreiecke ABC und $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, die BC und $\bar{B}\bar{C}$, CA und $\bar{C}\bar{A}$, AB und $\bar{A}\bar{B}$ in den Punkten Q, R, S und s in O schneide. Durch O legen wir die affinen Gleichstrahlen o und $\bar{o}$ mit den Schnittpunkten U, V, W und $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ auf BC, CA, AB bez. $\bar{B}\bar{C}, \bar{C}\bar{A}, \bar{A}\bar{B}$. In allen diesen Punkten errichten wir nach der Drehung des Dreiecks $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ um den Winkel φ ebenfalls die Senkrechten zu den Ebenen ABC und $A\bar{B}\bar{C}$, ihre Schnittpunkte mit der Ebene des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ seien $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Die ersteren liegen in der Halbierungsebene des Winkels φ, die letzteren in der seines Nebenwinkels. Die beiden Scharen dieser Halbierungsebenen, die der

Gesamtheit aller möglichen Werte von φ entsprechen, bilden zwei kongruente Ebenenbüschel. Zwei solche Ebenenbüschel werden von beliebigen Geraden in projektiven Punktreihen geschnitten. Die Punkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{V}$; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{W}$ durchlaufen also je zwei projektive Punktreihen, das heißt aber, die Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{W}$ umhüllen drei Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 in den Vertikalebenen durch die Geraden BC, CA, AB und die Ebenen der Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ folglich einen Kegel K mit dem Scheitel O, aus dem die Kegelschnitte von jenen Vertikalebenen ausgeschnitten werden. Die Hauptachsen von k_1, k_2, k_3 sind QU, RV, SW, die Nebenachsen $\sqrt{QU^2 - \overline{QU}^2}$, $\sqrt{RV^2 - \overline{RV}^2}$, $\sqrt{SW^2 - \overline{SW}^2}$, denn die Quadrate der letzteren werden bekanntlich dargestellt durch die vierfachen Produkte der Abstände $\mathfrak{Q}Q$, $\mathfrak{U}U$ bez. $\mathfrak{R}R$, $\mathfrak{V}V$ bez. $\mathfrak{S}S$, $\mathfrak{W}W$ der Punkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{V}$; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{W}$ von der Ebene ABC, dieselben sind aber gleich den vierfachen Produkten der Abstände q, u usw. der Punkte Q und U, R und V, S und W von der Geraden s; schreibt man für die letzteren $4q \cdot u = (q+u)^2 - (q-u)^2$ usw., so erhält man sofort die obigen Werte.

Die Seiten der Dreiecke $\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0\mathfrak{C}^0$, die man in derselben Weise wie die Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ erhält, nachdem man $\triangle \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ durch eine Drehung um O wiederum in affine Lage zum Dreieck ABC gebracht hat, umhüllen dieselben Kegelschnitte k_1, k_2, k_3, die Ebenen der Dreiecke daher denselben Kegel K, denn es haben dann die Punkte Q, R, S und U, V, W lediglich ihre Rollen vertauscht.

Mit Hilfe dieser Bemerkung läßt sich nun auch entscheiden, ob drei Polygone, die paarweise den von uns aufgestellten Bedingungen genügen, als Orthogonalprojektionen eines und desselben Polyeders betrachtet werden können. Zunächst ist freilich zu zeigen, daß es überhaupt möglich

ist, daß drei Polygone jene Bedingungen paarweise gleichzeitig erfüllen.

Haben wir zwei affine und affin gelegene Dreiecke, so hat ein drittes, welches sich zu beiden in affine Lage bringen lassen soll, zwei Ungleichungen zu erfüllen; denken wir uns eine Seite von ihm gegeben, so kann der dritte Eckpunkt nur außerhalb zweier bestimmter Kegelschnitte angenommen werden. Das kann aber auf ∞^2 Arten geschehen.

Seien weiter $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ zwei Vierecke, deren homologe Ecken auf Parallelen liegen und $A_3 B_3 C_3$ ein Dreieck, das sich sowohl zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$ als auch zum Dreieck $A_2 B_2 C_2$ in affine Lage bringen läßt. Dann muß ein Punkt D_3, der $\triangle A_3 B_3 C_3$ zu einem Vierecke der verlangten Art ergänzt, auf zwei bestimmten Geradenpaaren liegen. Jeder der 4 Schnittpunkte der beiden Geradenpaare kann also als Punkt D_3 gewählt werden.

Sind uns endlich zwei unseren Forderungen genügende Polygone mit $n = 5$ oder mehr Ecken nebst einem zu zwei homologen Vierecken derselben passenden Viereck gegeben, so sind die Punkte, welche letzteres zu einem n-Eck der verlangten Art ergänzen, als Schnittpunkte je zweier Geraden bestimmt.

Fassen wir nun zunächst drei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ ins Auge. Die Ecken A_1, A_2, A_3 seien in einem Punkte A vereinigt, ferner seien die beiden letzten Dreiecke bereits zum ersten affin gelegen, und s_{12}, s_{13} die Senkrechten zu den Affinitätsstrahlen des ersten und zweiten bez. ersten und dritten aus A. Ferner denken wir uns die Geraden s_{23} und s_{32} ermittelt, die entstehen, wenn wir die Dreiecke $A B_2 C_2$ und $A B_3 C_3$ durch eine Drehung des letzteren oder die entgegengesetzte des ersteren um A in affine Lage zueinander bringen und von A aus auf die Affinitätsstrahlen die Senkrechten fällen. Da es je zwei Drehungen der ge-

nannten Art gibt, gibt es außer s_{23}, s_{32} noch ein andres Paar s'_{23}, s'_{32} solcher Geraden. Es seien nun B_{12}, C_{12} die Schnittpunkte der Affinitätsstrahlen $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ mit s_{12}; B_{13}, C_{13}, B_{23}, C_{23}, B_{32}, C_{32} die analogen Punkte auf s_{13}, s_{23} und s_{32}. Drehen wir dann $\triangle A B_2 C_2$ um s_{12}, $\triangle A B_3 C_3$ um s_{13} und errichten in den Punkten $B_1 C_1$; $B_2 C_2$; $B_3 C_3$ die Senkrechten auf den Ebenen $A B_1 C_1$, $A B_2 C_2$, $A B_3 C_3$, so erhalten wir in der früher beschriebenen Weise eine Schar von Dreiecken $\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{C}_{12}$ mit den Projektionen $A B_1 C_1$ und $A B_2 C_2$, und ebenso eine Schar von Dreiecken $\mathfrak{A}_{13}\mathfrak{B}_{13}\mathfrak{C}_{13}$ mit den Projektionen $A B_1 C_1$ und $A B_3 C_3$. Die Ebenen der ersteren umhüllen einen Kegel K_{12}, die der letzteren einen Kegel K_{13} mit dem Scheitel A. Es kann also nur dann ein Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ geben, welches sowohl der Schar der Dreiecke $\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{C}_{12}$ als auch der Schar der Dreiecke $\mathfrak{A}_{13}\mathfrak{B}_{13}\mathfrak{C}_{13}$ angehört und daher alle drei vorgegebenen Dreiecke zu Projektionen hat, wenn K_{12} und K_{13} eine gemeinsame Tangentialebene haben. Die Kegel K_{12} und K_{13} haben nun 0 oder 2 oder 4 gemeinsame Tangentialebenen, je zwei davon liegen stets zur Ebene $A B_1 C_1$ spiegelbildlich. Im dritten Fall gibt es zwei Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der verlangten Art, die Drehungen der Ebene $A B_2 C_2$ um s_{12} und der Ebene $A B_3 C_3$ um s_{13} lassen sich in diesem Fall so ausführen, daß s_{23} und s_{32} zusammenfallen, und auch so, daß s'_{23} und s'_{32} zusammenfallen; die Ebenen, welche in den Punkten B_{12}, B_{13}, B_{23} und C_{12}, C_{13}, C_{23} auf s_{21}, s_{13} und $s_{23} = s_{32}$ bez. $s'_{23} = s'_{32}$ senkrecht stehen, schneiden sich dann in den gesuchten Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Im zweiten Fall lassen sich entweder nur s_{23} und s_{32}, oder nur s'_{23} und s'_{32} zur Deckung bringen und es gibt nur ein Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Im ersten Fall lassen sich weder s_{23} und s_{32} noch s'_{23} und s'_{32} zur Deckung bringen.

Wir betrachten weiter drei Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$, $A_3 B_3 C_3 D_3$, die unsern Bedingungen genügen;

$A_1 A_2 A_3$ mögen wieder zusammenfallen in A. Das zweite und dritte Viereck seien zum ersten bereits so gelegen, daß $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, desgleichen $B_1 B_3$, $C_1 C_3$, $D_1 D_3$ parallel sind; s_{12} und s_{13} seien die Senkrechten zu diesen Geraden durch A. Ferner seien die Geraden s_{23} und s_{32} durch A aufgesucht, die senkrecht zu den Verbindungslinien der homologen Eckpunkte der Vierecke $A B_2 C_2 D_2$ und $A B_3 C_3 D_3$ sind, wenn man das letztere durch eine passende Drehung um A in eine Lage $A B_3{}^0 C_3{}^0 D_3{}^0$ bez. das erstere durch die entgegengesetzte Drehung in die Lage $A B_2{}^0 C_2{}^0 D_2{}^0$ bringt. Die

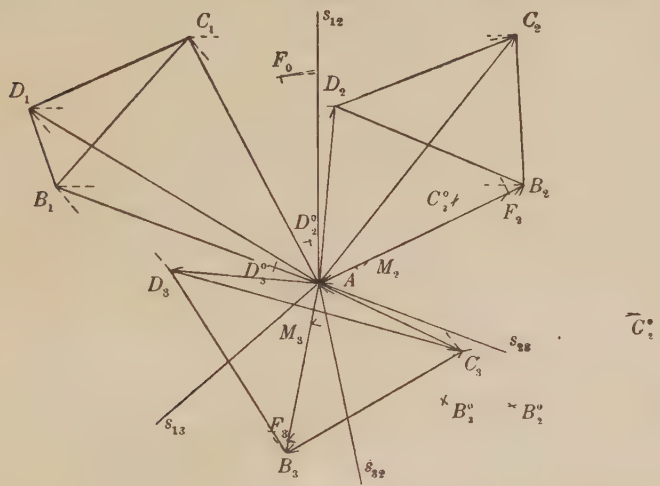

Fig. 4.

Schnittpunkte der Geraden $B_1 B_2$, $B_1 B_3$, $B_2 B_3{}^0$, $B_3 B_2{}^0$ usw. mit den Geraden s_{12}, s_{13}, s_{23} und s_{32} bezeichnen wir wie oben mit B_{12}, B_{13}, B_{23}, B_{32} usw. Die Geraden s_{23} und s_{32} sind durch die Beschaffenheit der Vierecke $A B_1 C_1 D_1$, $A B_2 C_2 D_2$, $A B_3 C_3 D_3$ eindeutig bestimmt. Ein Tetraeder, welches diese drei Vierecke zu Orthogonalprojektionen hat, kann daher nur existieren, wenn s_{23} und s_{32} durch eine Drehung der Ebene $A B_2 C_2 D_2$ um s_{12} und eine Drehung der Ebene

$AB_3C_3D_3$ um s_{13} zur Deckung gebracht werden können. Die Ecken des Tetraeders werden dann von den Schnittpunkten der in B_{12}, B_{13}, B_{23} usw. zu s_{12}, s_{13}, s_{23} senkrechten Ebenen gebildet, und es gibt zwei solche Tetraeder $\mathfrak{ABCD}$, welche zueinander symmetrisch sind. Die Ebenen der Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ sind dabei wieder gemeinsame Tangentialebenen zweier Kegel K_{12} und K_{13}, die von den Ebenen der Dreiecke mit den Projektionen AB_1C_1 und AB_2C_2 bez. AB_1C_1 und AB_3C_3 umhüllt werden. Umgekehrt von der Existenz gemeinsamer Tangentialebenen dieser Kegel auf das Vorhandensein eines Tetraeders $\mathfrak{ABCD}$ mit den Projektionen $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$, $AB_3C_3D_3$ zu schließen ist aber nur dann erlaubt, wenn es zwei Paar solcher Tangentialebenen gibt, denn gibt es nur ein Paar, so ist es nach den früheren Darlegungen möglich, daß die Dreiecke AB_2C_2 und AB_3C_3 nicht nach Drehung um s_{23} und s_{32}, sondern um zwei andere Gerade s'_{23} und s'_{32} als Projektionen der in den Tangentialebenen gelegenen Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ mit der Projektion AB_1C_1 erscheinen.

In ganz analoger Weise läßt sich die Untersuchung auch durchführen für drei Polygone mit fünf oder mehr Ecken. Das Ergebnis läßt sich aussprechen in dem Satz: Stellen drei Polygone paarweise Orthogonalprojektionen eines Polyeders dar, so gibt es kein oder ein Paar symmetrischer Polyeder, welche alle drei Polygone gleichzeitig zu Orthogonalprojektionen haben. Der zweite Fall tritt stets dann ein, wenn drei aus homologen Punkten der Polygone gebildete Vierecke gemeinsame Orthogonalprojektionen eines Tetraeders sind.

Wir wollen nun noch einen kurzen Blick auf die orthogonalen Projektionen eines Tetraeders durch Ebenen

auf Gerade werfen und zusehen, ob man auch durch eine Anzahl solcher Projektionen ein Tetraeder bestimmen kann. Wir beschränken uns auf Tetraeder, weil die Untersuchung für den Fall, daß man andre Polyeder in Betracht zieht, zu keinem Ergebnis führt, während von einem Dreieck beliebig viele Projektionen vorgegeben werden dürfen.

Wir gehen aus von einem Tetraeder $OLMN$, dessen Eckpunkte L, M, N in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Ursprung O die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ haben, und denken es uns projiziert auf einen Strahl s durch O mit den Richtungskosinussen α, β, γ. Dann sind die Projektionen l, m, n von OL, OM, ON auf s

$$l = x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma$$
$$m = x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma$$
$$n = x_3\alpha + y_3\beta + z_3\gamma$$

Daraus folgt

$$\alpha:\beta:\gamma:1 = \begin{vmatrix} l & y_1 & z_1 \\ m & y_2 & z_2 \\ n & y_3 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & l & z_1 \\ x_2 & m & z_2 \\ x_3 & n & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & l \\ x_2 & y_2 & m \\ x_3 & y_3 & n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} l & y_1 & z_1 \\ m & y_2 & z_2 \\ n & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & l & z_1 \\ x_2 & m & z_2 \\ x_3 & n & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & l \\ x_2 & y_2 & m \\ x_3 & y_3 & n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2,$$

oder

$$\begin{aligned} & l^2\{|yz|_{23}^2 + |zx|_{23}^2 + |xy|_{23}^2\} + m^2\{|yz|_{31}^2 + |zx|_{31}^2 + |xy|_{31}^2\} \\ & + n^2\{|yz|_{12}^2 + |zx|_{12}^2 + |xy|_{12}^2\} \\ & + 2lm\{|yz|_{23}|yz|_{31} + |zx|_{23}|zx|_{31} + |xy|_{23}|xy|_{31}\} \\ & + 2mn\{|yz|_{31}|yz|_{12} + |zx|_{31}|zx|_{12} + |xy|_{31}|xy|_{12}\} \\ & + 2nl\{|yz|_{12}|yz|_{23} + |zx|_{12}|zx|_{23} + |xy|_{12}|xy|_{23}\} \\ & - |xyz|^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn z. B. $|yz|_{23}$ die zweigliedrige Determinante mit den Zeilen $y_2 z_2$ und $y_3 z_3$ und $|xyz|$ wie früher die dreigliedrige Determinante mit den Zeilen $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ bezeichnet.

Betrachtet man l, m, n als rechtwinklige Koordinaten eines Raumpunktes P, so besagt diese Gleichung, daß P auf einer Fläche zweiten Grades mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt. Gibt man die Projektionen l_i, m_i, n_i des Tetraeders $OLMN$ auf sechs Strahlen s_i $(i = 1, 2 \ldots 6)$ vor (deren relative Lage noch unbekannt ist), so ist die Fläche zweiten Grades bestimmt. Ihre Gleichung lautet

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \xi\eta & \eta\zeta & \zeta\xi & 1 \\ l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 & 1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 & 1 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 & 1 \\ l_4^2 & m_4^2 & n_4^2 & l_4 m_4 & m_4 n_4 & n_4 l_4 & 1 \\ l_5^2 & m_5^2 & n_5^2 & l_5 m_5 & m_5 n_5 & n_5 l_5 & 1 \\ l_6^2 & m_6^2 & n_6^2 & l_6 m_6 & m_6 n_6 & n_6 l_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jedes Wertetripel ξ, η, ζ, welches dieser Gleichung genügt, stellt die Projektionen des Tetraeders $OLMN$ auf einen Strahl s durch O dar. Dabei ist allerdings vorauszusetzen, daß die Fläche ein Ellipsoid sei, da ξ, η, ζ als Projektionen von OL, OM, ON nicht unendlich werden dürfen. Die Bedingung hierfür ist, wenn wir die Gleichung abgekürzt

$$a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2\,a_{12}\xi\eta + 2\,a_{13}\xi\zeta + 2\,a_{23}\eta\zeta + a_0 = 0$$

schreiben:

$$a_0 < 0, \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} > 0,$$

$$a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{13}^2 > 0,$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2\,a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 > 0.$$

Fällt nun s mit OL zusammen, so muß ξ ein Maximum werden, d. h. dieses ξ gehört dem einen Berührungspunkt der beiden zur $\eta\zeta$-Ebene parallelen Tangentialebenen des Ellipsoids an. Damit ist die Länge von OL bestimmt, sowie auch die Länge der Projektionen von OM und ON auf die Kante OL. In gleicher Weise liefern die Tangentialebenen des Ellipsoids, die parallel zur $\xi\zeta$- bez. zur $\xi\eta$-Ebene sind, die Längen von OM und ON und die Projektionen der andern Kanten auf diese. Das genügt, wie leicht zu sehen, um das Tetraeder zu konstruieren und auch die relative Lage der sechs Strahlen s_i, auf denen die gegebenen Projektionen l_i, m_i, n_i liegen, zu bestimmen.

Lebenslauf.

Ich, Georg Richard Simmen, ev.-luth. Konfession, bin am 23. Februar 1892 in Annaberg im Erzgeb. als Sohn des verpfl. Geometers Heinrich Christoph Simmen geboren. Von Ostern 1898 bis Ostern 1902 besuchte ich die höhere Bürgerschule meiner Vaterstadt; während dieser Zeit, im Januar 1900, starb mein Vater. Ostern 1902 trat ich in die Sexta des Königlichen Realgymnasiums zu Annaberg ein, Ostern 1911 verließ ich es mit dem Zeugnis der Reife. Hierauf wandte ich mich in Leipzig dem Studium der reinen und angewandten Mathematik und Physik zu.

Allen meinen Lehrern bin ich zu Dank verpflichtet, vor allem aber gebührt mein aufrichtigster Dank Herrn Geheimrat Prof. Dr. K. Rohn für die mannigfache Anregung und Unterstützung, die ich von ihm während meines Studiums und insbesondere bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit erfahren habe.